ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN CHÍNH

SỬ DỤNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẠI SỐ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

Công trình được hoàn thành tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Việt Hải

Phản biện 1: PGS.TS. Trịnh Thanh Hải
Phản biện 2: PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng

Luận văn được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận văn
Họp tại: TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Ngày 27 tháng 5 năm 2018

Có thể tìm hiểu luận văn tại:
- Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên
- Thư viện Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

Giải bài toán hình học bằng phương pháp hình học thuần túy đôi khi rất khó khăn đặc biệt là các bài toán nâng cao trong các kỳ thi học sinh giỏi. Tất nhiên lời giải hình học đẹp đẽ vẫn là ưu tiên số một nhưng không phải lúc nào ta cũng tìm ra. Trên thực tế các kiến thức đại số hỗ trợ rất nhiều cho việc giải các bài toán hình học, nhiều trường hợp cách "đại số hóa” toàn bộ hoặc bộ phận bài toán hình học làm cho lời giải bài toán đơn giản hơn, gần gũi hơn. Đó chính là lý do tôi chọn đề tài "Sử dụng một số phương pháp đại số để giải các bài toán hình học".

1. Mục đích của đề tài luận văn

- Tìm hiểu cách sử dụng một số phương pháp đại số và giải các bài toán hình học bao gồm: Phương pháp biến đổi đại số trực tiếp; phương pháp lập phương trình-hệ phương trình; phương pháp hàm số và bất đẳng thức; phương pháp tọa độ hóa. Lựa chọn phương pháp nào tùy thuộc vào đặc trưng của bài toán hình học đang xét.

- Trình bày các bước vận dụng mỗi phương pháp nói trên vào việc giải các bài toán hình học thông qua các ví dụ minh họa điển hình.

- Kết hợp giữa kiến thức về lượng giác và giải tích để các phương pháp đại số khi áp dụng vào hình học đạt hiệu quả. Trình bày lời giải bài toán hình bao của họ đường thẳng trong mặt phẳng, giới thiệu về phương trình hình học.

- Bồi dưỡng năng lực dạy học chuyên đề hình học khó ở trường THPT góp phần đào tạo học sinh giỏi môn Toán.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm: (1) Các hệ thức trong hình học phẳng và không gian; (2) Cách giải phương trình, hệ phương trình; (3) Các bất đẳng thức cơ bản, cách tìm cực trị; (4) Mặt phẳng tọa độ và không gian tọa độ; (5) Tọa độ tỷ cự.

Chương 2. Một số phương pháp đại số trong bài toán hình học

Chương này là nội dung chính của luận văn, bao gồm các mục sau: (1) Phương pháp biến đổi đại số trực tiếp; (2) Phương pháp lập phương trình, hệ phương trình; (3) Phương pháp hàm số và bất đẳng thức; (4) Phương pháp tọa độ hóa.

Chương 3. Các vấn đề liên quan

Chương này bao gồm các mục sau: (1) Hình bao của họ đường thẳng, họ mặt phẳng; (2) Giới thiệu về phương trình hình học.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Để giúp cho việc giải bài toán hình học bằng phương pháp đại số ta cần hệ thống các kiến thức cần thiết về các hệ thức hình học, và một số kiến thức về đại số sau:

1.1 Các hệ thức hình học

(1) Tam giác vuông; (2) Định lý cosin và hệ quả; (3) Định lý sin; (4) Định lý hàm tan; (5) Độ dài đường trung tuyến; (6) Độ dài đường phân giác; (7) Diện tích hình phẳng: Tam giác vuông; tam giác thường; tam giác đều; hình thang; hình bình hành; hình tròn. (8) Một số hệ thức đặc biệt trong tam giác và trong đường tròn: Hệ thức Stewart; hệ thức Euler; hệ thức Ptole′my; hệ thức Leibniz. (9) Khoảng cách giữa các điểm đặc biệt.

1.2 Biến đổi đại số, giải phương trình, hệ phương trình

Giải phương trình là tìm hết tất cả các nghiệm của phương trình. Về phương diện lôgic có thể đưa ra ba phương pháp sau: (1) *Biến đổi hệ quả và thử lại*, (2) *Biến đổi tương đương*, (3) *Đoán nhận và khẳng định*.

1.3 Các bất đẳng thức cơ bản, cách tìm cực trị

1.3.1 Bất đẳng thức đại số

(a) Bất đẳng thức Cauchy; (b) Bất đẳng thức Bunhiacopski; (c) Bất đẳng thức Chebyshev; (d) Bất đẳng thức Bernouly.

1.3.2 Định lý về dấu của tam thức bậc hai

1.3.3 Tìm cực trị của biểu thức 1 hoặc 2 biến

1.4 Mặt phẳng tọa độ và không gian tọa độ

1.4.1 Mặt phẳng tọa độ

1. Đường thẳng

   a. Công thức tính góc giữa 2 đường thẳng

   b. Khoảng cách từ 1 điểm đến đường thẳng

   c. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng

2. Đường tròn

   a. Phương trình đường tròn

   b. Phương tích của $M_0(x_0, y_0)$ đối với đường tròn

3. Elip, Hypebol, Parabol

   a. Phương trình chính tắc của 3 đường cô nic

   b. Điều kiện tiếp xúc của đường cô nic và đường thẳng $Ax + By + C = 0$.

1.4.2 Không gian tọa độ

a. Tích có hướng của hai véc tơ

b. Phương trình đường thẳng

c. Góc giữa hai đường thẳng

d. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

e. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng α.

1.5 Tọa độ tỷ cự

1.5.1 Nhắc lại về tọa độ tỷ cự

Định nghĩa. Giả sử ABC là tam giác cơ sở. Tọa độ tỷ cự của điểm M đối với tam giác ABC là bộ ba số $(x:y:z)$ sao cho

$$x:y:z=\overline{MBC}:\overline{MCA}:\overline{MAB}.$$

Ta ký hiệu tọa độ tỷ cự của điểm M là $M(x:y:z)$ và ta có nếu $M(x:y:z)$ thì $M(kx:ky:kz)$ với mọi $k\neq 0$. Tọa độ đó được gọi là chuẩn hóa nếu $x+y+z=1$.

$G(1:1:1); I(a:b:c); O(\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C)$

$O(a^2(b^2+c^2-a^2:b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2)$

$O_a(-S_{(O_aBC)}:S_{(O_aCA)}:S_{(O_aAB)})\equiv O_a(-a:b:c)$

$O_b(S_{(O_aBC)}:-S_{(O_aCA)}:S_{(O_aAB)})\equiv O_b(a:-b:c)$

$O_c(S_{(O_aBC)}:S_{(O_aCA)}:-S_{(O_aAB)})\equiv O_c(a:b:-c)$

$H(\tan A:\tan B:\tan C)\equiv\left(\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}:\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}:\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$

1.5.2 Một số sự kiện hình học trong tọa độ tỷ cự

a. Diện tích tam giác: Lấy ABC là tam giác cơ sở, giả sử $P(p_1:p_2:p_3), Q(q_1:q_2:q_3), R(r_1:r_2:r_3)$ có tọa độ tỷ cự chuẩn hóa theo ABC. Khi đó ta có:

$$\overline{PQR}=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3\end{vmatrix}\overline{ABC}.$$

b. Đường thẳng đi qua 2 điểm $P(p_1:p_2:p_3), Q(q_1:q_2:q_3)$

c. Phương trình đường thẳng: $ux+by+cz=0$.

d. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

e. Phương trình tổng quát của đường tròn

f. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC: a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$.

Chương 2

Một số phương pháp đại số trong bài toán hình học

Nội dung chương này trình bày một số phương pháp đại số để giải các bài toán hình học: (1) Phương pháp biến đổi đại số trực tiếp; (2) Phương pháp lập phương trình, hệ phương trình; (3) Phương pháp hàm số, bất đẳng thức; (4) Phương pháp tọa độ hóa. Các ví dụ minh họa được tham khảo trong [4], [5], [7].

2.1 Phương pháp biến đổi đại số trực tiếp

Nội dung của phương pháp này là sử dụng các hệ thức hình học đã có để biểu diễn các đại lượng hình học, các điều kiện bài toán sau đó dùng biến đổi đại số trực tiếp để giải quyết bài toán. Ta xét một số ví dụ điển hình 2.1.1; 2.1.6, các ví dụ và các bài toán khác trình bày trong luận văn.

2.1.1 Tính toán các đại lượng hình học

Ví dụ 2.1.1. *Cho tam giác ABC thỏa mãn $BC^2+AC^2=5AB^2$. Tìm góc giữa các trung tuyến AM và BN.*

Lời giải.

Ký hiệu $AB=c, BC=a, AC=b$, $\widehat{NOM}=\varphi$. Theo tính chất của trọng tâm O và công thức độ dài đường trung tuyến $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

Ta có độ dài OM, ON lần lượt bằng

$$OM = \frac{m_a}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}; ON = \frac{m_b}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \qquad (2.1)$$

Ta có $MN = \dfrac{c}{2}$, từ (2.1) áp dụng định lý cô sin trong ΔOMN:

$$\frac{m_a^2}{9} + \frac{m_b^2}{9} - \frac{2m_a m_b}{9}\cos\varphi = \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 - 8m_a m_b \cos\varphi = 9c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + a^2 + 4c^2 - 8m_a m_b \cos\varphi = 9c^2 \Leftrightarrow 8m_a m_b \cos\varphi = 5c^2 - b^2 + a^2.$$

Từ đó suy ra $cos\varphi = 0$ và $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 2.1.2. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.1.3. (IMO 1975, #3) *Trên các cạnh của tam giác ABC tùy ý dựng ra phía bên ngoài các tam giác ABR, BCP, CAQ với* $\widehat{CBP} = \widehat{CAQ} = 45^0, \widehat{BCP} = \widehat{ACQ} = 30^0, \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0$. *Chứng minh rằng* $\widehat{QRP} = 90^0$ *và* $QR = RP$.

2.1.2 Các bài toán chứng minh

Ví dụ 2.1.4. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.1.5. ([1]) *Nếu trọng tâm G nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì ta có hệ thức:* $5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ca)$.

Chứng minh.

Áp dụng công thức (9) chương 1 ta có:

$$IG = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Khi $G \in (I,r)$ thì $IG = r$ hay $r = \dfrac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2+b^2+c^2)}$

$\Leftrightarrow 9r^2 = 9r^2 - 3p^2 + 2(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}(a+b+c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow 5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ca)$.

Ví dụ 2.1.6. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.1.7. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.1.8. (Định lý Carnot, xem [1]) *Cho tam giác ABC, trên cạnh* BC, CA, AB *lần lượt lấy các điểm* D, E, F. *Qua D dựng* $d_2 \perp CA$, *qua F dựng* $d_3 \perp AB$. *Chứng minh rằng* d_1, d_2, d_3 *đồng quy khi và chỉ khi*

$$DB^2 + EC^2 + FA^2 = DC^2 + EA^2 + FB^2 \tag{2.2}$$

Ví dụ 2.1.9. (Định lý Steiner, xem [1]) *Cho tam giác ABC, ký hiệu các bán kính* r, R, r_a, r_b, r_c *như ở chương 1. Khi đó ta có*

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R \tag{2.3}$$

Ví dụ 2.1.10. *(Xem luận văn)*
Bài toán 2.1; Bài toán 2.2; Bài toán 2.3; Bài toán 2.4 *(Xem luận văn)*

2.2 Phương pháp lập phương trình, hệ phương trình

Giải toán hình học bằng phương pháp lập phương trình, hệ phương trình được thực hiện theo các bước sau:

• Chọn ẩn x: độ dài, khoảng cách, góc,... với điều kiện thích hợp

• Từ quan hệ hình học tìm ra quan hệ đại số của các đại lượng dẫn đến phương trình, hệ phương trình đại số

• Giải phương trình, hệ phương trình và lấy nghiệm thích hợp

Để minh họa phương pháp ta xét hai ví dụ 2.2.3; 2.2.8, các ví dụ khác trình bày trong luận văn.

2.2.1 Tính toán các đại lượng hình học

Ví dụ 2.2.1. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.2.2. *(Xem luận văn)*

Ví dụ 2.2.3. *Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC lấy một điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho* $MN \parallel AB$. *Biết* $AB = AN = 1cm, CM = \sqrt{3}cm$. *Tìm độ dài đoạn thẳng MN.*
Lời giải.